

Michael Högele:
Eine mathematische Lesart eiszeitlicher Klima-Umbrüche

18. September 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Inhärente Komplexität und resultierende Modellhierarchien in der Klimamodellierung	2
2	Ein qualitatives Modell für Klima-Umbrüche während der letzten Eiszeit	3
2.1	Zeitreihen und Modellwahl	3
2.2	Heuristik stochastisch ausgelöster Übertritte	3
2.2.1	Im eindimensionalen Modell	3
2.2.2	Im Funktionenraum von Wärmedichten	12
3	Schlussbemerkungen	15

Die Variabilität von Klimagrößen, wie Jahresdurchschnittstemperaturen oder der Höhe des Meeresspiegels, hat in den letzten Jahren, sowohl in der Öffentlichkeit als auch in den Wissenschaften, eine überwältigende Aufmerksamkeit erfahren. So wird in den Berichten des Intergovernmental Panel on Climate Change (kurz: IPCC) [1] die Bedeutung eines immer besseren Verständnisses des Erdsystems Klima und seiner zeitlichen Veränderungen umfassend dargelegt und im Hinblick auf die Auswirkung für die Aktivität des Menschen die Entwicklung immer besserer Modelle und deren fortschreitende Durchdringung, sowohl auf qualitativer, als auch auf quantitativer Ebene angemahnt. In diesem Kurzaufsatz soll zu Beginn auf einige Besonderheiten der Klimamodellierung im Allgemeinen und die Bedeutung einfacher, niedrig-dimensionaler Modelle im Besonderen hingewiesen werden.

Im zweiten Teil wird solch ein von Klimatologen in [2] vorgeschlagenes Beispiel in zwei Varianten formuliert. Es besteht im Wesentlichen aus einem einfachen deterministischen dynamischen System, welches mit kleiner Intensität stochastisch gestört wird. Seine mathematische Analyse liefert einen qualitativen Zufallsmechanismus für die “Uhr” hinter paläoklimatischen Umbrüchen der Temperaturentwicklung der letzten Vereisungsphase (“Eiszeit”) des gegenwärtigen Eiszeitalters, sogenannter Dansgaard-Oeschger-Ereignisse, im Kontext stochastischer Dynamik. Auf physikalischer Seite deuten die Untersuchungen in [3] und [4] auf einen stochastischen Resonanzmechanismus hin, für dessen genaue Beschreibung diese mathematische Überlegungen mit konzeptionellen Modellen eine Vorarbeit darstellen. Datenanalysen in [2], [5] und [6] legen nahe, dass die stochastische Störung stark nicht-Gauß’sch ist, sondern polynomiell abfallende Verteilungsenden besitzt. Sie wird durch sogenannte stabile Lévy-Prozesse, einer wohlbekannteren Klasse von stochastischen Prozessen mit Sprüngen, modelliert.

Die erste Modellvariante betrachtet die Temperatur über allen Größen global gemittelt. Ihr asymptotisches Austrittsverhalten aus Anziehungsgebieten des ungestörten Systems im Limes kleiner Rauschintensität wird in [7], [8] und [9] rigoros analysiert. Die zweite Variante führt nun eine räumliche Auflösung ein und betrachtet Dichten von Temperaturverteilung über einem Gebiet auf der Erdoberfläche. Sie ist mathematisch durch eine stochastische partielle Differentialgleichung mit additivem Lévyrauschterm gegeben. Das

asymptotische Übertrittsergebnis für diesen Fall ist eines der Hauptresultate der Dissertation [10], Theorem 2.18. Die mathematische Heuristik beider Austrittsphänomene soll hier in stark vereinfachter Kurzform auf deutsch erklärt werden.

1 Inhärente Komplexität und resultierende Modellhierarchien in der Klimamodellierung

Das Erdsystem Klima unterscheidet sich in mehrerer Hinsicht von anderen physikalischen Systemen. Im Gegensatz zu Phänomenen, die räumlich und zeitlich klar lokalisiert betrachtet werden können, zeichnet es sich durch eine irreduzible Komplexität aus, die aus dem Zusammenspiel von Größen auf sehr unterschiedlichen zeitlichen, wie örtlichen Skalen hervorgeht. So haben beispielsweise relevante Orbitalzyklen der Erde eine Periode von mehreren 10.000 Jahren, während die Sonnenaktivität im Bereich von Jahrzehnten schwankt. Lokale Einflussfaktoren, wie die Vegetation, Gebirgs- oder Meeresnähe spielen auf der Skala von mehreren Kilometern genauso eine zentrale Rolle, wie Meeresströmungen und Tropenstürme die teilweise enorme Energiemengen über mehrere 10.000 km transportieren. Beispiele hierfür sind unter anderem der Golfstrom und die tropischen Zyklone des Nordatlantiks (“Hurricanes”), die oft vor der Küste Afrikas starten und bis weit ins Innere Nordamerikas wirken.

Diese Komplexität und Unabgeschlossenheit bringt es mit sich, dass trotz der immensen Zunahme an Rechnerleistungen umfassende Modelle (engl. ‘coupled general circulation models’, kurz: CGCM), die alle wesentlichen Aspekte abbilden, sehr schwer zu realisieren sind. Stattdessen werden in der Regel Modelle für Subsysteme betrachtet, deren Komplexität von immer noch sehr hoch, die jedoch am Computer approximiert werden können. Hierbei werden die nicht aufgelösten Variablen als idealisierte “externe” Einflussgrößen integriert. Teilsysteme davon werden in sogenannten Modellen mittlerer Komplexität (engl. ‘Earth system models of intermediate complexity, kurz: EMIC) untersucht. Eine Diskussion davon findet man in [1] und [11], sowie den zahlreichen Referenzen darin.

Sowohl CGCM als auch EMIC haben sich als äußerst nützlich erwiesen. Ihre am Computer generierte Ausgabe hat jedoch ein Niveau an Komplexität, welches unmittelbare Einsicht und ein vollständiges Verständnis abgesehen von visueller (Pseudo-) Evidenz unmöglich macht. Zudem müssen hochauflösende Modelle wie die genannten mit entsprechend vielen Daten kalibriert werden, was aber auf Grund der oft statistisch ungenügenden Datenlage schwierig ist. Damit ist insbesondere die gegenseitige Validierung von simulierten Daten und Zeitreihen ein hartes Problem. Desweiteren beinhaltet bereits die EMIC-Klasse von Modellen Gleichungssysteme der Strömungsmechanik, deren Diskretisierungen teilweise chaotisches Verhalten aufweisen, siehe beispielsweise [12]. Das Zusammenspiel zwischen hoher Komplexität, spärlicher und unsicherer Kalibrierungsgrundlage, das Fehlen von Experimenten im klassischen Sinne, sowie teilweise sensitiver Abhängigkeit von den Daten führt zu einer inhärenten Unsicherheit. Paläoklimatische Phänomene die sich über große Zeiträume erstrecken, vereinen alle diese Schwierigkeiten in besonderer Weise.

Eine Möglichkeit die notwendige, sorgfältige Modellanalyse und -synopse zu ergänzen ist das Studium radikal vereinfachter, explizit lösbarer Modelle, sogenannter konzeptioneller Modelle. Diese Modelle lösen nur mehr eine oder sehr wenige Variablen explizit auf und stellen die zu untersuchenden Phänomene im besten Fall nur mehr als grobe Karikaturen dar. Erweitert man konzeptionelle Klimamodellen um eine stochastische Komponente werden die externen Einflüsse als statistische Größen (und nicht nur als gemittelte Werte) aufgefasst, deren Verteilungen durch Grenzwertssätze plausibel werden. Zudem können sie mit Hilfe der stochastischen Analysis in einigen Fällen explizit gelöst werden. Ihr Studium erlaubt die qualitativen Muster in komplexen Modellen durch bekannte Konzepte der stochastischen Dynamik zu deuten, wie beispielsweise stochastische Resonanz, Metastabilität, stochastische Bifurkation, oder zufällige Attraktoren. Dies hat einerseits den Vorteil, dass bereits ein großer Fundus an wohlbekannten Methoden und Konzepten zur Verfügung steht, welche zu neuen Einsichten, Erklärungsmustern und Intuition für komplexe Modelle führen kann.

Andererseits sei nicht verschwiegen, dass das Studium konzeptueller stochastischer Klimamodelle viele neue und faszinierende mathematische Fragen aufwirft, die ihrerseits die Mathematik zu befruchten und die Entwicklung neuer Techniken und Fragestellungen sowohl fördert als auch erfordert.

2 Ein qualitatives Modell für Klima-Umbrüche während der letzten Eiszeit

2.1 Zeitreihen und Modellwahl

In [2] untersuchen kopenhagener Klimaforscher um Ditlevsen (1999) die Konzentration der Calciumionen in Eisbohrkernen aus grönländischen Gletschern. Entsprechend des Fließverhaltens der Gletscher gibt es Orte auf dem Gletscher wo die Bohrkerne von Tiefenbohrungen aus Schichten von vereistem nicht abgeschmolzenem Neuschnee jedes Jahres besteht. Entsprechend kleiner Masseunterschiede und ihrer Verdunstungsrate stellen die Isotopenverteilungen verschiedener Elemente, beispielsweise das Verhältnis von $^{18}O/^{16}O$, einen guten approximativ Indikator für die Durchschnittstemperaturen des jeweiligen Jahres dar. Der untersuchte Zeitraum umfasst dabei die letzte Vereisungsphase (von ca. 90.000 bis 10.000 Jahren v.u.Z.) des aktuellen Eiszeitalters (seit ca. 2,58 Millionen Jahren).

Auf Grundlage seiner statistischen Untersuchungen, welche auf schwere, nur polynomiell abfallende Verteilungsschwänze und ein bistabiles Verhalten hindeuten, schlägt er als konzeptionelles Modell eine bistabile Differentialgleichung vor, welche von einem symmetrischen, sogenannten stabilen Lévy-Prozess mit kleiner Intensität gestört wird. Diese Prozesse sind nicht-Gauß'sche Prozesse mit (statistisch) stationären und unabhängigen Zuwächsen. Im Gegensatz zu Gauß'schen Prozessen mit stationären und unabhängigen Zuwächsen besitzen sie jedoch keine stetigen Realisierungen, wie beispielsweise die Brown'sche Molekularbewegung, sondern besitzen Sprünge. In der Arbeit [13] untersucht Ditlevsen dieses Modell und leitet formal mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichungen für die zu Grunde liegenden Dichten, die korrekte erwartete Austrittszeit des Prozesses aus einem Intervall um einen der stabilen Zustände ab.

Auf der mathematischen Seite wird Ditlevsens Untersuchung aufgegriffen. In den Arbeiten [5] und [6] wird auf Grundlage einer feinen, pfadweisen Rauheitsanalyse mit Hilfe sogenannter p -Variationen ein neues statistische Verfahren entwickelt, welches innerhalb der Klasse α -stabiler Diffusionen mit kleiner Intensität das zugehörige Modellwahlproblem löst. Dies determiniert nicht, ob eine solche Komponente tatsächlich in den Daten zu finden ist, jedoch ist die gute Konvergenz der Schätzer bezüglich der Daten ein möglicher Indikator dafür.

Im Gegensatz zu einer Gauß'schen Störungen, deren Austrittsverhalten seit langem bekannt ist, siehe beispielsweise [14], und exponentiell im Kehrwert der Störintensität wächst, also sehr große Übergangszeiten produziert, wächst die erwartete Austrittszeit mit asymptotisch polynomialer Ordnung. Damit wächst die erwartete Übertrittszeit qualitativ langsamer und damit realistischer als im Gauß'schen Modell für kleine Rauschintensität. Dieses Phänomen sowie die genauen Gleichungen werden im nächsten Abschnitt erläutert.

2.2 Heuristik stochastisch ausgelöster Übertritte

2.2.1 Im eindimensionalen Modell

In der mathematischen Literatur wird Ditlevsens physikalische Untersuchung [13] von Imkeller und Pavlyukovich in [7], [8] and [15] mathematisch präzisiert und rigoros bewiesen. Das betrachtete Modell beschreibt die global räumlich gemittelte Temperatur $(T_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ für $\varepsilon \geq 0$ als über ein Jahr gemittelte Durchschnittstemperaturen um jahreszeitliche Effekte zu vermeiden. Die vorgeschlagene stochastische Differentialgleichung hat **zwei** Komponenten.

1. Ein Reaktionsterm f der Gleichung kann von einfachen Energiebilanzüberlegungen zwischen der absorbierten und der emittierten Energie der Sonnenenergie hergeleitet werden, siehe beispielsweise [16]. Diese skalare Größe wird als negativer Gradient $f = -U'$ eines glatten Energiepotentials U ("stets hangabwärts in einer Energielandschaft") aufgefasst.

2. Der Rauschterm besteht formal aus der Zeitableitung $\varepsilon \frac{dL}{dt}$ eines Lévy-Prozesses $L = (L_t)_{t \geq 0}$, mit Intensität $\varepsilon > 0$. Ein Lévy-Prozess ist ein stochastischer Prozess $(L_t)_{t \geq 0}$, d.h. eine Familie von Zufallsvariablen $L_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ über einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, mit folgenden Eigenschaften: **a)** L

startet in 0 fast sicher. **b)** Der Zuwachs zwischen Zeiten $s < t$ hat dieselbe Verteilung wie der Zuwachs von 0 nach $t - s$, formal

$$L_t - L_s \stackrel{d}{=} L_{t-s}, \quad 0 < s \leq t.$$

Diese Eigenschaft nennt man Stationarität der Zuwächse. **c)** Alle zeitlichen Zuwächse, die sich nicht überlappen, sind unabhängig, formal: für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < \dots < t_n$ ist die Familie der Zufallsvariablen

$$(L_1 - L_0, \dots, L_{t_n} - L_{t_{n-1}})$$

unabhängig. **d)** Für jeden deterministischen Zeitpunkt $t \geq 0$ ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung der zufälligen Funktion $s \mapsto L_s(\omega)$ an der Stelle t null. Formal $\mathbb{P}(L_{t+} \neq L_{t-}) = 0$ für alle $t \geq 0$, wobei $L_{t+} := \lim_{s \searrow t} L_s$ und $L_{t-} := \lim_{s \nearrow t} L_s$.

Imkeller und Pavlyukevich verbinden in [8] die Komponenten **1.** und **2.** und untersuchen auf einem Intervall $[a, b]$ die formale Gleichung

$$\frac{dT_t^\varepsilon}{dt} = -U'(T_t^\varepsilon) + \varepsilon \frac{dL_t}{dt}, \quad T_0^\varepsilon = x \in [a, b], t \geq 0, \varepsilon > 0, \quad (2.1)$$

wobei T_t^ε die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t \geq 0$ an einem festen Ort darstellt. U ist eine Potentiallandschaft mit einem lokalen Minimum $s^* \in [a, b]$, welches einen stabilen "Klimazustand" darstellt, gegen welche die ungestörte Temperatur T_t konvergiert, jedoch um den die durch die stochastische Impulse $\varepsilon \frac{dL_t}{dt}$ gestörte Temperatur T_t^ε fluktuiert. Diese Fluktuationen sind in der Regel klein, jedoch führen Sie dazu dass der Prozess T_t^ε das Intervall $[a, b]$ sicher verlässt.

Wir können zudem annehmen, dass $-U'(s) = 0$ existiert und stabil ist, d.h. $-U''(s) < 0$.

Die stochastische Störung $L = (L_t)_{t \geq 0}$ ist hier bei ein symmetrischer α -stabiler Prozess, das ist ein spezieller Lévy-Prozess, der von einem Parameter $\alpha \in (0, 2)$ abhängt. Er wird später durch die Selbstähnlichkeit seines Lévymaßes beschrieben. Für $\alpha = 1$ ist L ein Cauchy-Prozess, für $\alpha = 2$ erhält man den degenerierten Grenzfall einer Brown'schen Bewegung. Siehe beispielsweise Sato [17].

Zentrale Frage: Wie verhält sich die erwartete Austrittszeit $\mathbb{E}[\mathbb{T}_x(\varepsilon)]$ im Limes $\varepsilon \rightarrow 0+$ für

$$\mathbb{T}_x(\varepsilon) := \inf\{t > 0 \mid T_t^\varepsilon(x) \notin [a, b]\} \quad ?$$

In Worten: Wird das stabile System von durch die beschriebene Art von stochastischen Impulsen gestört, wie schnell nimmt die Austrittszeit zu, wenn die Störungsintensität immer kleiner wird?

Vorüberlegungen:

1. - Betrachten wir Gleichung (2.1) für $\varepsilon = 0$, so erhalten wir folgende skalare, gewöhnliche Differentialgleichung, deren Lösung wir mit $T^0 = T$ bezeichnen,

$$\frac{d}{dt}T_t = -U'(T_t), \quad T_0 = x \in [a, b], t \geq 0.$$

Da $[a, b]$ nur einen stabilen Fixpunkt s^* so hat für jeden Mindestabstand d zum stabilen Punkt s^* die Ableitung stets die Minimalgröße

$$M := \sup_{y \in [a, s^* - d] \cup [s^* + d, b]} | -U'(y) | > 0$$

besitzt (andernfalls wäre entgegen der Annahme ein weiterer kritischer Punkt in $[a, b]$). Dadurch ist für ein endliches Intervall $[a, b]$ klar, dass es eine endliche Zeit $t_0 := \frac{b-a}{M} > 0$ gibt, sodass für alle $x \in [a, b]$ und $t \geq t_0$ gilt $T_t(x) \in [s^* - d, s^* + d]$.

Für Anfangswerte innerhalb von $[s^* - d, s^* + d]$ erfüllt $T_t(x)$ approximativ die linearisierte Gleichung um s^*

$$\frac{d}{dt}T_t = -U''(s^*)T_t, \quad T_0 = x,$$

welche mit Hilfe von elementaren Abschätzungen impliziert, dass ein $m > 0$ existiert, sodass

$$|T_t(x) - s^*| \leq |x - s^*|e^{-mt} \leq |b - a|e^{-mt} \quad \text{für alle } t \geq 0, x \in [a, b].$$

Eine obere Schranke für die maximale Zeit, die $T_t(x)$ von beliebigen Anfangswerten $x \in [a, b]$ zu erreichen, erhält man durch das Auflösen der Ungleichung und

$$|b - a|e^{-mt} \leq d \quad \implies \quad t \geq \frac{1}{m}(|\ln(d)| + |\ln(b - a)|). \quad (2.2)$$

Koppeln wir wiederum die Schranke d an $\varepsilon > 0$ durch $d(\varepsilon) := \varepsilon^\gamma$, $\gamma > 0$, so ergibt sich ein $C' > 0$ sodass für ein hinreichend kleines ε ,

$$\forall t \geq C' |\ln(\varepsilon)| \text{ und } x \in [s^* - d, s^* + d]: \quad T_t(x) \in [s^* - \varepsilon^\gamma, s^* + \varepsilon^\gamma]. \quad (2.3)$$

Wir sind nur an kleinen Werten für $\varepsilon > 0$ interessiert, deshalb lohnt sich die Beobachtung dass stets $C > C'$ und $\varepsilon_0 > 0$ existieren, sodass für alle $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt dass $C |\ln(\varepsilon)| \geq C' |\ln(\varepsilon)| + t_0$. Fassen wir dies mit (2.2) und (2.3) zusammen, erhalten wir

$$\forall t \geq C |\ln(\varepsilon)| \text{ und } x \in [a, b]: \quad T_t(x) \in [s^* - \varepsilon^\gamma, s^* + \varepsilon^\gamma]. \quad (2.4)$$

In Worten zusammengefasst: Für Zeiten $t \geq C |\ln(\varepsilon)|$ ist das ungestörte System $T_t(x)$ in einer ε^γ -Umgebung von s^* (und bleibt dort), und das unabhängig von seinem Anfangswert $x \in [a, b]$.

2. - Nun wird der Prozess $L = (L_t)_{t \geq 0}$ näher untersucht. Mit Hilfe partieller Integration erhält man die zu (2.1) äquivalente Formulierung

$$T_t^\varepsilon = x - \int_0^t U'(T_s^\varepsilon) ds + \varepsilon L_t, \quad x \in [a, b], t \geq 0, \varepsilon > 0. \quad (2.5)$$

Hier taucht L direkt in der Gleichung auf.

Die Verteilungen von $(L_t)_{t \geq 0}$ zu festen Zeitpunkten sind nicht wie im Fall der Brown'schen Bewegung durch bekannte (Gauß- / Normalverteilungs-) Dichten gegeben. Stattdessen existiert ein eindeutiges, nicht normiertes Maß ν in \mathbb{R} , das sogenannte Lévy-Sprungmaß, welches Intervalle auf Zahlen in $[0, +\infty]$ sendet, mit den Integrierbarkeitseigenschaften,

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2) \nu(dx) < \infty. \quad (2.6)$$

Wir wissen, dass die Pfade $t \mapsto L_t(\omega)$ des Prozess L mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht stetig sind und in jedem positiven Zeitintervall abzählbar unendlich viele Sprünge besitzen, für die genaue Theorie siehe [18, 17]. Zudem sei bekannt, dass die Pfade $t \mapsto L_t(\omega)$ für jedes $t > 0$ stets einen linken Limes $L_{t-} := \lim_{s \nearrow t} L_s \in \mathbb{R}$ besitzen, und genauso einen rechten Limes, der sogar mit dem Funktionswert L_t übereinstimmt: $L_{t-} := \lim_{s \searrow t} L_s = L_t$. In Worten: Die Realisierungen von L sind zu fast allen Zeitpunkt rechtsstetig und besitzen einen linken Limes. Die Sprünge der Realisierungen haben also zu keinem Zeitpunkt die Form einer "Polstelle".

Ein Sprung zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$ ist dann die Unstetigkeit $\Delta_t L := L_t - L_{t-}$. Zur Erinnerung: Für jeden deterministischen Zeitpunkt $t \geq 0$ gilt nach Eigenschaft **d**) dass $\mathbb{P}(\Delta_t L \neq 0) = 0$, aber dennoch hat der stochastische Prozess extrem viele Sprünge, genauer, abzählbar unendlich viele Sprünge in jedem noch so kleinen, festen Zeitintervall, diese finden aber an zufälligen Zeitpunkten statt!

Der Zusammenhang vom Sprungmaß ν und den Sprüngen von L : Das Sprungmaß ν charakterisiert das Sprungverhalten von L auf zweierlei Weise: ν ist im wesentlichen ein nicht auf 1 normiertes Wahrscheinlichkeitsmaß, welches angibt **wohin** Sprünge $\Delta_t L$ gehen, der Wert durch den wir

dieses Maßteilen müssen um ein Wahrscheinlichkeitsmaß bekommen, gibt an mit welche **wie häufig** solche Sprünge auftreten.

Betrachtet man Sprünge jenseits einer Mindestgröße $c > 0$, also $|\Delta_t L| \geq c$ oder $\Delta_t L \in \mathbb{R} \setminus (-c, c)$ (“ \mathbb{R} ohne $(-c, c)$ ”), so ist das Maß $\nu(\mathbb{R} \setminus (-c, c)) < \infty$, in Worten: Die Intensität für Sprünge um mehr als Betrag c ist stets endlich. Fixieren wir diese Intensität $\beta(c) := \nu(\mathbb{R} \setminus (-c, c)) < \infty$. Die Endlichkeit $\beta(c) < \infty$ drückt aus, dass es eine endliche erwartete Wartezeit zwischen zwei solchen Sprüngen gibt. Es kann gezeigt werden, dass solche Sprünge stets gedächtnislos sind, das bedeutet mathematisch sie sind exponentialverteilt. Der Parameter der Exponentialverteilung ist ebenfalls gerade $\beta(c) > 0$ mit erwarteter Wartezeit $\frac{1}{\beta(c)}$. Je kleiner also die Intensität, desto länger muss man warten.

Für einen fixierte Mindestgröße $c > 0$ und den ersten Sprungzeitpunkt $\tau_1(c)$ (“Wann findet ein Sprung um einen Wert in $\mathbb{R} \setminus (-c, c)$ zum ersten Mal statt?”) mit $\Delta_{\tau_1(c)} \in \mathbb{R} \setminus (-c, c)$ ist die Verteilung eines Sprunges $\Delta_{\tau_1(c)} L$ (“Wenn um einen Wert in $\mathbb{R} \setminus (-c, c)$ gesprungen wird, wie ist dann die Verteilung für Zuwächse innerhalb von $\mathbb{R} \setminus (-c, c)$?”) bekannt. Es ist genau die eingangs erwähnte Renormalisierung von ν auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß verteilt. Genauer

$$\mathbb{P}(\Delta_{\tau_1(c)} L \in I) = \frac{\nu(I \cap (\mathbb{R} \setminus (-c, c)))}{\nu(\mathbb{R} \setminus (-c, c))} = \frac{\nu(I \cap (\mathbb{R} \setminus (-c, c)))}{\beta(c)} \quad \text{für jedes Intervall } I \subset \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Desweiteren sind die erste Sprungzeit $\tau_1(c)$ und die Sprungverteilungen $\Delta_{\tau_1(c)} L$ stochastisch unabhängig. Das soll hier nicht bewiesen werden ist jedoch nicht schwierig.

Es stellt sich heraus, [18], dass die meisten Sprünge von L tatsächlich sehr klein sind. Auch verlangen die Bedingungen (2.6) an ν nicht, dass $\nu((-\infty, c))$, die sogenannte “Intensität” endlich ist. Tatsächlich ist die Intensität für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit 0 im Inneren von I in der Regel unendlich. All diese Überlegungen gelten für allgemeine Lévy-Prozesse, die keine Gauß’sche Komponente haben. Nun schränken wir die L weiter ein.

Der Prozess L wurde eingangs als symmetrischer α -stabiler Prozess angenommen. Dies ist durch Grenzwertsätze gerechtfertigt, die für symmetrische α -stabile Prozesse gelten, siehe [19]. Ein **symmetrischer α -stabiler Prozess** ist durch folgende Selbstähnlichkeit des Lévymaßes charakterisiert. Für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, welches 0 nicht enthält und auch nicht an ihn grenzt hat, gilt

$$\nu(rI) = r^\alpha \nu(I) \quad \text{für jedes } r > 0, \quad (2.8)$$

und für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\nu(I) = \nu(-I). \quad (2.9)$$

Wir koppeln nun die Schranke durch $c(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\rho}$ an $\varepsilon > 0$. Sonst bleibt alles bisher gesagte gültig. Nun können wir den Prozess L in zwei verschiedene Teilprozesse zerlegen: $L = \xi^\varepsilon + \eta^\varepsilon$. Dies passiert folgendermaßen.

Sei $\tau_i^\varepsilon := \tau_i(c(\varepsilon))$ der (zufällige) Zeitpunkt des i -ten Sprunges von L mit einer Mindestgröße $|\Delta_t L| \geq \frac{1}{\varepsilon^\rho}$. Deweiteren sei $W_i^\varepsilon := \Delta_{\tau_i^\varepsilon} L$ das i -te Sprunginkrement. Sei nun $\eta_t^\varepsilon := \sum_{i: \tau_i^\varepsilon \leq t} W_i^\varepsilon$, der Teilprozess von L , der nur alle Sprünge von L mit der genannten Mindestgröße enthält und

$$\xi_t^\varepsilon := L_t - \eta_t^\varepsilon, \quad t \geq 0,$$

der “Restprozess” von L , der nach Definition nur Sprünge der Größe $|\Delta_t \xi^\varepsilon| < \frac{1}{\varepsilon^\rho}$ enthält. Der Prozess ξ^ε erbt von L ebenfalls die unendliche Intensität im Gegensatz zu η^ε . Es stellt sich überraschenderweise heraus, dass beide Prozesse η^ε und ξ^ε stochastisch unabhängig sind.

In Worten zusammengefasst: Die stochastische Störung L kann in einen Anteil mit “kleinen” ξ^ε und “großen” Sprüngen η^ε zerlegt werden, die voneinander unabhängig sind. Zudem ist sie so gewählt, dass die kleine Sprungstörung $\varepsilon \xi^\varepsilon$ für kleines ε gleichmässig klein wird.

3. - Analog zur Zerlegung von $L = \eta^\varepsilon + \xi^\varepsilon$ suchen nun nach einer Zerlegung von T^ε in Anteile die von η^ε und von ξ^ε “angetrieben” werden. Betrachtet man nun (2.5), so sieht man dass die großen Sprünge von

T^ε identisch zu den Sprüngen von L sind, da der Integralterm auf der rechten Seite stetig ist. Formal $\Delta_{\tau_1^\varepsilon} T^\varepsilon = \Delta_{\tau_1^\varepsilon} L$. Zudem vererbt sich die Unabhängigkeit zeitlicher Zuwächse von L auf die Zuwächse von T^ε . Deshalb gilt vor dem ersten Sprung, $t \in [0, \tau_1)$

$$\begin{aligned} T_t^\varepsilon(x) &= x - \int_0^t U'(T_s^\varepsilon) ds + \varepsilon L_t \\ &= x - \int_0^t U'(T_s^\varepsilon) ds + \varepsilon \xi_t^\varepsilon \end{aligned}$$

und zum Zeitpunkt des ersten Sprungs

$$\begin{aligned} T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x) &= x - \int_0^{\tau_1^\varepsilon} U'(T_s^\varepsilon) ds + \varepsilon L_{\tau_1} \\ &= x - \int_0^{\tau_1^\varepsilon} U'(T_s^\varepsilon) ds + \varepsilon(\xi_{\tau_1}^\varepsilon + W_1^\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Die von L geerbte Unabhängigkeit der Zuwächse von T^ε impliziert, dass die Gleichung (2.5) zwischen dem ersten und dem zweiten Sprung $t \in (\tau_1^\varepsilon, \tau_2^\varepsilon)$ mit dem erreichten Wert “neu” startet

$$\begin{aligned} T_t^\varepsilon(x) &\stackrel{d}{=} T_{t-\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x)) \\ &= T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x) - \int_{\tau_1^\varepsilon}^t U'(T_s^\varepsilon(T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x))) ds + \varepsilon \xi_{\tau_1^\varepsilon+t}^\varepsilon \\ &\stackrel{d}{=} T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x) - \int_0^{t-\tau_1^\varepsilon} U'(T_s^\varepsilon(T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x))) ds + \varepsilon \underbrace{(\xi_{\tau_1^\varepsilon+t}^\varepsilon - \xi_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon)}_{=: \xi_t^{1,\varepsilon}}. \end{aligned}$$

In Verteilung gilt für den um τ_i^ε verschobenen Prozess $((\xi_{\tau_i^\varepsilon+t}^\varepsilon - \xi_{\tau_i^\varepsilon}^\varepsilon)_t)_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (\xi_t^{\varepsilon,i})_{t \geq 0}$. Bezeichnet man nun $(Y_t^{\varepsilon,i})_{t \geq 0}$ die Lösung der Gleichung

$$Y_t^{\varepsilon,i}(x) = x - \int_0^t U'(Y_s^{\varepsilon,i}) ds + \varepsilon \xi_t^{\varepsilon,i}, \quad t \geq 0,$$

so besitzt die Lösung T_t^ε für alle $t \in [0, \tau_{i+1}^\varepsilon - \tau_i^\varepsilon)$ folgende Darstellung

$$T_{t+\tau_i^\varepsilon}^\varepsilon(x) = Y_t^{\varepsilon,i}(T_{\tau_i^\varepsilon}^\varepsilon(x)) \tag{2.11}$$

und

$$T_{\tau_{i+1}^\varepsilon}^\varepsilon(x) = Y_{\tau_{i+1}^\varepsilon - \tau_i^\varepsilon}^{\varepsilon,i}(T_{\tau_i^\varepsilon}^\varepsilon(x)) + \varepsilon W_{i+1}^\varepsilon. \tag{2.12}$$

In Worten bedeutet das, dass nach dem i -ten Sprung der Prozess T^ε erneut von $T_{\tau_i^\varepsilon}^\varepsilon(x)$ aus startet und als Prozess $Y_t^{\varepsilon,i}(T_{\tau_i^\varepsilon}^\varepsilon(x))$ nur durch den kleinen Sprungprozess $\xi^{\varepsilon,i}$ angetrieben evolviert, bis zum nächsten Zeitpunkt τ_{i+1}^ε der nächste großen Sprung addiert wird. Danach beginnt dieser Mechanismus erneut von vorne, wobei lediglich i durch $i+1$ ersetzt wird.

Die Darstellung (2.22) mit (2.23) ist alles andere als selbstverständlich! Der Prozess T^ε könnte zu einem Zeitpunkt t von sehr viel mehr Vergangenheit abhängen und nicht nur bis von einem einzigen Wert $T_{\tau_i}^\varepsilon(x)$, und dabei alle Vorgeschichte vergessen. Diese Eigenschaft ist eine Konsequenz der sogenannten

starken Markoveigenschaft. Dies bedeutet insbesondere, sofern wir für beliebigen Anfangswert y den Ort $Y_{\tau_{i+1}^\varepsilon - \tau_i^\varepsilon}^{\varepsilon,i}(y)$ kennen, wir wissen von wo aus der Sprung $\varepsilon W_{i+1}^\varepsilon = \Delta_{\tau_{i+1}^\varepsilon} T^\varepsilon$ erfolgt, da

$$T_{\tau_{i+1}^\varepsilon}^\varepsilon(x) = Y_{\tau_{i+1}^\varepsilon - \tau_i^\varepsilon}^{\varepsilon,i}(T_{\tau_i^\varepsilon}^\varepsilon(x)) + \varepsilon W_{i+1}^\varepsilon.$$

Wir haben mit Hilfe der Gleichung (2.22) analog zur Zerlegung $L_t = \eta_t^\varepsilon + \xi_t^\varepsilon$ die Lösung T_t^ε zerlegt in die ‘‘kleine Sprunglösung’’ ($Y^{\varepsilon,i}$), welche nur von $\xi^{\varepsilon,i}$ gestört wird, und das Inkrement $\Delta_{\tau_i^\varepsilon} W_i^\varepsilon$ des Prozesses η^ε . Die Mächtigkeit dieser Beobachtung werden wir im Anschluss bei der Skizzierung des Austrittsverhaltens erkennen.

In Worten zusammengefasst: Die Zerlegung des stochastischen Störung L kann übertragen werden auf die Lösung T^ε der stochastischen Differentialgleichung, die von L getrieben wird und liefert Anteile Y^ε , die nur von ξ^ε getrieben werden und die großen Sprünge von η^ε selbst.

4. - Der letzte Teil der Überlegungen bezieht sich auf die kleine Rauschlösung. Nach Wahl von $\rho \in (0, 1)$ gilt für die Sprünge von $\xi^{\varepsilon,i}$, welches in Gleichung (2.1) in Form von $\varepsilon \xi^{\varepsilon,i}$ auf $Y^{\varepsilon,i}$ wirkt, dass für $t \in [0, \tau_{i+1}^\varepsilon - \tau_i^\varepsilon)$

$$|\Delta_t \varepsilon \xi^{i,\varepsilon}| = \varepsilon |\Delta_t \xi^{i,\varepsilon}| < \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^\rho} = \varepsilon^{1-\rho} \searrow 0, \text{ falls } \varepsilon \searrow 0.$$

Wir wissen, dass $\varepsilon \xi^{\varepsilon,i}$ als Teilprozess von εL ein reiner Sprungprozess ist, dessen maximale Sprunghöhe gegen 0 konvergiert. Somit ist intuitiv klar, dass auch $\varepsilon \xi^{\varepsilon,i}$ für $\varepsilon \searrow 0$ gegen 0 konvergiert. Damit ist aber auch klar, dass $Y^{\varepsilon,i}$, also wie bereits erklärt, T^ε nach dem i -ten Sprung, gegen $T^0 = T$ konvergieren sollte. Es kann gezeigt werden ([8], Proposition 2.9), dass die Wahrscheinlichkeit, dass $Y^{\varepsilon,i}$ zwischen zwei Sprüngen τ_i^ε und τ_{i+1}^ε einen Mindestabstand ε^γ zu $T^0 = T$ überschreitet gegen 0 konvergiert, wenn die Rauschintensität $\varepsilon \searrow 0$ geht. Nun konvergieren die deterministischen Lösung $T_t(x)$ für alle Anfangswerte $x \in [a, b]$ gegen $s^* \in [a, b]$ und verlassen also $[a, b]$ nie, d.h. $\mathbb{T}_x(0) = \infty$. Solange nun aber $Y^{\varepsilon,i}$ aber in der Nähe von T ist, kann es nicht $[a, b]$ verlassen, da es T in die Nähe von $s^* \in [a, b]$ folgt. Damit wird intuitiv klar, dass die Austrittszeit $\mathbb{T}(\varepsilon)$ von T^ε das Intervall $[a, b]$ zu verlassen im Wesentlichen aus (großen) Sprungzeitpunkten $(\tau_i^\varepsilon)_{i \in \mathbb{N}}$ besteht, da, wie eben gesehen haben, zwischen den Sprüngen, kein Austritt wahrscheinlich ist. Wir betrachten diesen Fall gleich ausführlicher.

In Worten zusammengefasst: Die Anteile Y^ε , die nur durch kleine Sprünge gestört werden, verhalten sich quasi-deterministisch, sie bleiben also mit überwältigender Wahrscheinlichkeit in der Nähe der deterministischen Lösung T .

Wenn wir die Vorüberlegungen 1.-4. zusammenfassen erhalten wir folgendes Szenario der Austritte von T^ε aus dem Intervall $[a, b]$. Wir zerlegen den Wertebereich von \mathbb{T}_x^ε , also $[0, \infty)$, in die nichtüberlappende (zufällige) Zeitintervalle

$$[0, \infty) = 0 \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} (\tau_i^\varepsilon, \tau_{i+1}^\varepsilon],$$

wobei $\tau_0^\varepsilon = 0$. Wir untersuchen die Intervalle $(\tau_i^\varepsilon, \tau_{i+1}^\varepsilon]$ einzeln. Wir beginnen mit dem Teilintervall $(0, \tau_1^\varepsilon) \subset (0, \tau_1^\varepsilon]$ und untersuchen danach den Endpunkt $t = \tau_1^\varepsilon$.

I.) Das Verhalten von T^ε im Zeitintervall $t \in (0, \tau_1^\varepsilon)$:

- Nehmen wir an, dass der Anfangswert von $T_t^\varepsilon(x)$ in einem minimal verkleinerten Intervall $x \in [a + \varepsilon^\gamma, b - \varepsilon^\gamma]$ liegt.
- Nach Gleichung (2.10) in 3. hat $T_t^\varepsilon(x)$ vor dem ersten großen Sprung, d.h. für $t < \tau_1^\varepsilon$, die Form $Y_t^{\varepsilon,1}(x)$.
- Nach 4. bleibt $Y_t^{\varepsilon,1}(x)$ für $t < \tau_1^\varepsilon$ mit gegen 1 konvergierender Wahrscheinlichkeit (für $\varepsilon \searrow 0$) in einer ε^γ -Umgebung der deterministischen Lösung $T_t(x)$.

- Die deterministische Lösung $T_t(x)$ bleibt für alle $t \geq 0$ und beliebige (kleine) Werte $\varepsilon > 0$ in $[a + \varepsilon^\gamma, b - \varepsilon^\gamma]$. Insbesondere sie verlässt also $[a, b]$ nie. Formal:

$$T_t(x) \in [a + \varepsilon^\gamma, b - \varepsilon^\gamma] \quad \text{für alle Zeiten } t \geq 0 \text{ und Anfangswerte } x \in [a + \varepsilon^\gamma, b - \varepsilon^\gamma]. \quad (2.13)$$

- Damit bleibt für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, Zeiten $t < \tau_1^\varepsilon$ und Anfangswerte $x \in [a + 2\varepsilon^\gamma, b - 2\varepsilon^\gamma]$

$$T_t^\varepsilon(x) = Y_t^{\varepsilon,1}(x) \in [T_t(x) - \varepsilon^\gamma, T_t(x) + \varepsilon^\gamma] \subset [a, b]. \quad (2.14)$$

In Worten zusammengefasst: $T_t^\varepsilon(x)$ hat für die Zeiten $t \in (0, \tau_1^\varepsilon)$ und Anfangswerte $x \in [a + \varepsilon^\gamma, b - \varepsilon^\gamma]$ mit sehr großer Wahrscheinlichkeit keinen Austritt aus $[a, b]$.

II.) Das Verhalten von T^ε zum Zeitpunkt $t = \tau_1^\varepsilon$: Nachdem wir gesehen haben, dass für $t < \tau_1^\varepsilon$ mit sehr großer Wahrscheinlichkeit kein Austritt aus $[a, b]$ stattfand, untersuchen wir als nächstes den (zufälligen) Zeitpunkt $t = \tau_1^\varepsilon$. Hierfür müssen wir verstehen, was direkt vor $t = \tau_1^\varepsilon$ passiert.

II.a) Das Verhalten von T^ε unmittelbar vor dem Zeitpunkt $t = \tau_1^\varepsilon$: Wir können das Nicht-Austritts-Resultat (2.14) für $t \in (0, \tau_1^\varepsilon)$ verfeinern, wir wissen sogar relativ genau, “wo” sich $T_t^\varepsilon(x)$ unmittelbar vor dem ersten großen Sprung $\varepsilon W_1^\varepsilon$ zum Zeitpunkt τ_1^ε befindet, nämlich in der Nähe von s^* . Das sieht man so:

- Nach Beobachtung 1. hat die deterministische Lösung $T_t(x)$ für beliebige Anfangswerte $x \in [a, b]$ (also auch für alle verkleinerten Gebiete $[a + \varepsilon^\gamma, b - \varepsilon^\gamma]$) und beliebige Werte $\varepsilon > 0$ und Zeiten $t \geq C|\ln(\varepsilon)|$ stets die Umgebung $[s^* - \varepsilon^\gamma, s^* + \varepsilon^\gamma]$ um den stabilen Punkt s erreicht.
- Nach Beobachtung 4. bleibt $Y_t^{\varepsilon,1}(x)$ für $t \leq \tau_1^\varepsilon$ mit überwältigender Wahrscheinlichkeit in einer ε^γ -Umgebung der deterministischen Lösung $T_t(x)$.
- Die Gleichung (2.7) in Beobachtung 2. besagt, dass die erwartete erste Sprungzeit $\mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon]$ wie eine Polstelle der Ordnung $\alpha\rho$ für $\varepsilon \searrow 0$, da

$$\mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon] = \frac{1}{\beta_\varepsilon} = \frac{1}{\nu(\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{\varepsilon^\rho}, \frac{1}{\varepsilon^\rho}])} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\rho}} \frac{1}{\nu(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])}.$$

- Da der Betrag der Logarithmusfunktion in null stets langsamer gegen unendlich wächst als jede Polstelle (in ε), wie auf der rechten Seite vorigen Ausdrucks, gilt für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, dass

$$C|\ln(\varepsilon)| < \frac{1}{\varepsilon^{\alpha\rho}} \frac{1}{\nu(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])} = \mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon].$$

Dies bedeutet, die Zeit für die deterministische Lösung T nach $[s^* - \varepsilon^\gamma, s^* + \varepsilon^\gamma]$ zu konvergieren, ist für kleine Werte von $\varepsilon > 0$ stets kleiner als die erwartete Sprungzeit $\mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon]$. Es gibt also ein Zeitfenster $[C|\ln(\varepsilon)|, \mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon]]$, in dem wir wissen dass sich $T_t^\varepsilon(x)$ befindet:

- Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, Anfangswerten $x \in [a + \varepsilon^\gamma, b - \varepsilon^\gamma]$ und Zeiten $C|\ln(\varepsilon)| \leq t < \mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon]$ wissen wir wo sich die Lösung mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit aufhält:

$$T_t^\varepsilon(x) = Y_t^{\varepsilon,1}(x) \in [T_t(x) - \varepsilon^\gamma, T_t(x) + \varepsilon^\gamma] \subset [s^* - 2\varepsilon^\gamma, s^* + 2\varepsilon^\gamma],$$

also nahe bei s^* .

In Worten zusammengefasst: Die Sprünge von $\varepsilon\xi^\varepsilon$ haben also für kleine Werte von $\varepsilon > 0$, Anfangswerten $x \in [a + \varepsilon^\gamma, b + \varepsilon^\gamma]$ mit überwältigender Wahrscheinlichkeit vor dem ersten großen Sprung keine Austritt verursacht und der Prozess $T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon$ also $T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon$ unmittelbar vor dem Sprung $\varepsilon W_1^\varepsilon$ befindet sich in der (für kleines ε) kleinen Umgebung $[s^* - 2\varepsilon^\gamma, s^* + 2\varepsilon^\gamma]$ um den stabilen Punkt s^* .

II.b) Das Verhalten von T^ε exakt zum Zeitpunkt $t = \tau_1^\varepsilon$:

- Unter Beobachtung 3. haben wir (Stichwort “starke Markoveigenschaft”) festgehalten, dass die Lösung $T_t^\varepsilon(x)$ immer, sobald wir wissen, wo sie sich befindet, ihr Vorwissen vergisst, und von dort aus erneut “frisch” startet. Wie bereits erwähnt, wissen wir wo sich der Prozess $T_{\tau_1^\varepsilon-}^\varepsilon(x)$ unmittelbar vor dem ersten großen Sprung befindet, nämlich mit mit überwältigender Wahrscheinlichkeit in der Umgebung $[s^* - 2\varepsilon^\gamma, s^* + 2\varepsilon^\gamma]$.
- Demnach kennen wir zum Zeitpunkt des ersten großen Sprungs τ_1^ε die Struktur von T^ε

$$T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x) = Y_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x) + \varepsilon W_1^\varepsilon \approx s^* + \varepsilon W_1^\varepsilon.$$

Zu diesem Zeitpunkt hat $T_t^\varepsilon(x)$ zum ersten Mal eine substantielle Wahrscheinlichkeit für einen Austritt aus $[a, b]$, nämlich genau dann falls

$$s^* + \varepsilon W_1^\varepsilon \notin [a, b] \iff W_1^\varepsilon \notin \left[\frac{1}{\varepsilon}(a - s^*), \frac{1}{\varepsilon}(b - s^*)\right].$$

- Von diesem Ereignis kennen die Wahrscheinlichkeit, da wir aus 2. die Verteilung von W_1^ε (2.7) und die Selbstähnlichkeit (2.8) von ν zur Verfügung haben

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_1^\varepsilon \notin \left[\frac{1}{\varepsilon}(a - s^*), \frac{1}{\varepsilon}(b - s^*)\right]) &= \mathbb{P}(\Delta_{\tau_1^\varepsilon} L \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{1}{\varepsilon}(a - s^*), \frac{1}{\varepsilon}(b - s^*)\right]) \\ &= \frac{\nu(\mathbb{R} \setminus \frac{1}{\varepsilon}[a - s^*, b - s^*] \cap \frac{1}{\varepsilon^\rho}(\mathbb{R} \setminus [-1, 1]))}{\beta_\varepsilon} \\ &= \frac{\varepsilon^\alpha \nu(\mathbb{R} \setminus [a - s^*, b - s^*])}{\varepsilon^\rho \nu(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])} \\ &= \varepsilon^{\alpha(1-\rho)} \frac{\nu(\mathbb{R} \setminus [a - s^*, b - s^*])}{\nu(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])}. \end{aligned}$$

In Worten zusammengefasst: Zum Zeitpunkt τ_1^ε kommt wird ein großes Sprunginkrement, dessen Verteilung durch die Selbstähnlichkeit bekannt ist, zu $Y_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x)$ addiert welches sich zu diesem Zeitpunkt nach II.a) in einer Umgebung von s^* befindet. Ein Austritt zu diesem Zeitpunkt ist also im Wesentlichen nur mit der Wahrscheinlichkeit möglich, die dieser Sprung besitzt um von s^* aus auszutreten.

III.) Die Intervalle $(\tau_i^\varepsilon, \tau_{i+1}^\varepsilon]$ für $i \geq 1$: Wir haben die Wahrscheinlichkeit des Austritts $\mathbb{T}_x(\varepsilon) \in (\tau_0^\varepsilon, \tau_1^\varepsilon]$ determiniert als

$$\mathbb{P}(\mathbb{T}_x(\varepsilon) \in (0, \tau_1^\varepsilon]) \approx \mathbb{P}(s + \varepsilon W_1^\varepsilon),$$

genauer erhalten wir

$$\mathbb{T}_x(\varepsilon) \stackrel{d}{\approx} \tau_1^\varepsilon, \text{ falls } s + \varepsilon W_1^\varepsilon \notin [a, b].$$

Sollte mit der erste große Sprung nicht zum Austritt führen, also $T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x) \in [a, b]$, oder für kleine $\varepsilon > 0$ genauer $T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x) \in [a + \varepsilon^\gamma, b - \varepsilon^\gamma]$, so beginnt mit Hilfe der starken Markoveigenschaft aus 2., das Austrittsszenario für $(\tau_1^\varepsilon, \tau_2^\varepsilon]$ genauso wie für $(\tau_0^\varepsilon, \tau_1^\varepsilon]$, lediglich mit dem Anfangswert x ersetzt durch den neuen Anfangswert $T_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon(x)$. Durch die starken Markoveigenschaft propagiert dieses Verhalten für alle $(\tau_i^\varepsilon, \tau_{i+1}^\varepsilon]$ und wir erhalten

$$\mathbb{T}_x(\varepsilon) \stackrel{d}{\approx} \begin{cases} \tau_1^\varepsilon, & \text{falls } s + \varepsilon W_1^\varepsilon \notin [a, b], \\ \tau_2^\varepsilon, & \text{falls } s + \varepsilon W_2^\varepsilon \notin [a, b], \text{ aber } s + \varepsilon W_1^\varepsilon \in [a + 2\varepsilon^\gamma, b - 2\varepsilon^\gamma], \\ \tau_3^\varepsilon, & \text{falls } s + \varepsilon W_3^\varepsilon \notin [a, b], \text{ aber } s + \varepsilon W_j^\varepsilon \in [a + 2\varepsilon^\gamma, b - 2\varepsilon^\gamma] \text{ für } j \in \{1, 2\}, \\ \tau_4^\varepsilon, & \text{falls } s + \varepsilon W_4^\varepsilon \notin [a, b], \text{ aber } s + \varepsilon W_j^\varepsilon \in [a + 2\varepsilon^\gamma, b - 2\varepsilon^\gamma] \text{ für } j \in \{1, 2, 3\} \\ \vdots & \ddots \end{cases} \quad (2.15)$$

In Worten zusammengefasst: Durch die starke Markoveigenschaft wiederholt sich das Szenario von $(0, \tau_1^\varepsilon]$ für jedes Intervall $(\tau_i^\varepsilon, \tau_{i+1}^\varepsilon]$ und liefert mit der Formel (2.15) ein präzises ‘‘Uhrwerk’’ für einen Austritt.

IV.) Die erwartete Austrittszeit: Mit diesen Überlegungen können wir für kleines ε die erwartete $\mathbb{E}[\mathbb{T}_x(\varepsilon)]$ approximieren. Wir erinnern an folgende Eigenschaften:

1. Die Inkremente $(W_i^\varepsilon)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen, die alle dieselbe Verteilung besitzen.
2. $\tau_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^i (\tau_j^\varepsilon - \tau_{j-1}^\varepsilon)$, wobei $(\tau_j^\varepsilon - \tau_{j-1}^\varepsilon) \stackrel{d}{=} \tau_1^\varepsilon - \tau_0^\varepsilon = \tau_1^\varepsilon$, sodass $\mathbb{E}[\tau_i^\varepsilon] = i\mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon]$.
3. Die Familien $(\tau_i^\varepsilon)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(W_i^\varepsilon)_{i \in \mathbb{N}}$ sind voneinander unabhängige Familien von Zufallsvariablen.
4. Es gilt die Summenformel

$$\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} = \frac{1}{q^2} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Damit gilt wegen der Approximation (2.15), dass es ein $\varepsilon_0 > 0$ existiert, sodass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ für alle $x \in [a + 2\varepsilon^\gamma, b - \varepsilon^{2\gamma}]$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{T}_x(\varepsilon)] &\approx \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[\tau_i^\varepsilon] \mathbb{P}(s^* + \varepsilon W_i^\varepsilon \notin [a, b] \text{ und } s^* + \varepsilon W_j^\varepsilon \in [a - 2\varepsilon^\gamma, b + 2\varepsilon^\gamma], j \in \{1, \dots, i-1\}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon] \mathbb{P}(s^* + \varepsilon W_i^\varepsilon \notin [a, b]) \prod_{j=1}^{i-1} \mathbb{P}(s^* + \varepsilon W_j^\varepsilon \in [a - 2\varepsilon^\gamma, b + 2\varepsilon^\gamma]) \\ &\approx \mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon] \mathbb{P}(s^* + \varepsilon W_1^\varepsilon \notin [a, b]) \sum_{i=1}^{\infty} i(1 - \mathbb{P}(s^* + \varepsilon W_1^\varepsilon \notin [a, b]))^{i-1} \\ &= \mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon] \mathbb{P}(s^* + \varepsilon W_1^\varepsilon \notin [a, b]) \frac{1}{\mathbb{P}(s^* + \varepsilon W_1^\varepsilon \notin [a, b])^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon]}{\mathbb{P}(s^* + \varepsilon W_1^\varepsilon \notin [a, b])} \\ &= \frac{1}{\beta_\varepsilon} \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^\alpha \nu(\mathbb{R} \setminus [a, b])} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^\alpha \nu(\mathbb{R} \setminus [a, b])}. \end{aligned}$$

In Worten zusammengefasst: Die Formel (2.15) für das Uhrwerk des Austritts erlaubt eine präzise Berechnung des erwarteten Austritts mit Hilfe einer geometrischen Reihe. Sie liefert eine erwartete Austrittszeit, welche sich wie $\frac{1}{\varepsilon^\alpha}$ geometrisch verhält.

2.2.2 Im Funktionenraum von Wärmedichten

In diesem Unterkapitel wird die eindimensionale stochastische Differentialgleichung (2.1) auf ein Modell mit einem räumlichen Parameter verallgemeinert. Genauer, die Temperatur bekommt nun die Form einer zufälligen Funktion $T^\varepsilon(t, \zeta)$, wie bisher mit einer Zeitvariable $t \geq 0$ und einer zusätzlichen Raumvariable $\zeta \in [0, 1]$, deren Werte eine Parametrisierung der Breitengrade vom Süd- zum Nordpol darstellen. Mathematisch ist tatsächlich nur relevant, dass ζ in einer beschränkten Teilmenge des \mathbb{R}^m liegt. Die zu Grunde liegende Dynamik beschreibt die zeitliche Entwicklung von Temperaturverteilungen über diesem Gebiet.

Dieser Modellierungsschritt führt direkt zu Gleichungen in unendlichdimensionalen Räumen, unendlichdimensionalen Modellen für stochastisches Rauschen und schliesslich von stochastischen gewöhnlichen zu stochastischen partiellen Differentialgleichungen (SPDG). Diese hat nun folgende **drei** Komponenten.

1. Wie bereits in Unterkapitel 2.2.1, betrachten wir den *Reaktionsterm* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als für alle Breitengrade $\zeta \in [0, 1]$ identisch durch elementare Energiebilanzgleichungen gewonnen, siehe [20]. Erneut nehmen wir $f = -U'$ an, diesmal wird aber U aus praktischen Gründen genauer spezifiziert.

2. Wir führen einen räumlichen *Diffusionsterm* $\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} T^\varepsilon$ ein, der der Wärmediffusion zwischen Äquator und Pol Rechnung trägt. Er basiert auf dem Energie-Ungleichgewicht verschiedener Sonneneinstrahlungswinkel. Natürlich ist der diffusive Charakter des Wärmetransports eine erste Näherung, die für die betrachteten Zeitskalen, eine akzeptable Hypothese darstellt.

Unter diesen Voraussetzung und der Wahl von $f = -U'$ für $U(y) := (\mu/4)y^4 - (\mu/2)y^2$ für einen festen Parameter $\mu > 0$ erhalten wir als einfaches Beispiel die deterministische Chafee-Infante-Gleichung, deren Lösung wir mit T bezeichnen. Sie ist formal gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T(t, \zeta) &= \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} T(t, \zeta) + f(T(t, \zeta)) & \zeta \in [0, 1], t > 0, \\ T(t, 0) &= T(t, 1) = 0, & t > 0, \\ T(0, \zeta) &= x(\zeta), & \zeta \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die Wahl von f ist aus vielerlei Gründen gerechtfertigt. Der einfachste Grund ist, dass die Dynamik von der Chafee-Infante-Gleichung vollständig explizit bekannt ist, für andere polynomielle Potentiale bleiben die Ergebnisse korrekt, sind jedoc nur abstrakt gegeben. So ist seit langem, beispielsweise aus [21], [22], [23], [24], [25] oder [26] bekannt, dass die Lösung T jeweils entsprechend ihrer gegebenen Anfangswerte x Werte in unendlichdimensionalen Funktionenräumen annimmt. Typische Beispiele sind der Raum der quadratintegrierbaren, messbaren Funktionen $L^2(0, 1)$, dessen Teilraum der zusätzlich schwach differenzierbaren Funktionen mit Nullrandwerten $H_0^1(0, 1)$ oder der Raum der stetigen Funktionen mit Nullrandwerten $C_0(0, 1)$. In unserem Fall arbeiten wir in $H = H_0^1$ aus mehreren technischen Gründen. Für eine formale Definition, siehe [10] or [27]. Er liegt aber eingebettet im Raum der stetigen Funktionen über dem Intervall $[0, 1]$, deren Werte an den Rändern 0 und 1 jeweils gleich 0 sind. Dadurch erfüllt es die intuitiven Vorstellung einer gemittelten Wärmeverteilungsdichte über den Breitengraden, die am Nord- und Südpol den fixierten Wert null haben.

Der Reaktionsterm f besitzt zwei Nullstellen, die durch die lokalen Minima von U gegeben sind. Damit besitzt die Chafee-Infante-Gleichung analog zum eindimensionalen Fall, abgesehen von speziellen Werten des Parameters μ , zwei hyperbolische, stabile, funktionenwertige Gleichgewichte $\{\phi^+, \phi^-\}$ mit maximaler Regularität und damit auch in H . Es gibt jedoch typischerweise mehrere instabile Gleichgewichte, deren Anzahl und Form vom Parameter $\mu > 0$ abhängt. Der Raum H wird vollständig in die Anziehungsgebiete D^+ und D^- der stabilen Gleichgewichte ϕ^+ und ϕ^- aufgeteilt mit einer glatten trennenden Mannigfaltigkeit $S = H \setminus (D^+ \cup D^-)$.

3. Wir addieren analog zu Gleichung (2.1) einen α -stabilen Prozess L , der nun jedoch Werte H annimmt. Genauer: $(L(t))_{t \geq 0}$ ist ein Lévy-Prozess, wie in 2.2.1 definiert, wobei lediglich die Wertemenge \mathbb{R} wird durch den Raum $H = H_0^1(0, 1)$ ersetzt wird. Die Selbstähnlichkeit (2.8) und (2.9) haben hier folgende Form.

$$\nu(rA) = r^\alpha \nu(A) \quad \text{für alle Borel-messbaren Mengen } A \subset H \text{ mit } 0 \notin \bar{A}, \tag{2.17}$$

und für alle Borel-messbaren Mengen $A \subset H$ gilt

$$\nu(A) = \nu(-A).$$

Addieren wir nun den α -stabilen Lévy-Prozess mit Intensität $\varepsilon > 0$ zu Gleichung (2.16), so erhalten wir formal die stochastische Chafee-Infante-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T^\varepsilon(t, \zeta) &= \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} T^\varepsilon(t, \zeta) + f(T^\varepsilon(t, \zeta)) + \varepsilon \dot{L}(t, \zeta) & \zeta \in [0, 1], t > 0, \\ T^\varepsilon(t, 0) &= T^\varepsilon(t, 1) = 0, & t > 0, \\ T^\varepsilon(0, \zeta) &= x(\zeta), & \zeta \in [0, 1], \end{aligned} \quad (2.18)$$

erneut mit dem Parameter $\mu > 0$ im Reaktionsterm $f = -U'$. Der Rauschterm \dot{L} steht hier formal für die verallgemeinerte Zeitableitung des Lévy'schen Sprungprozesses L . Sowohl L als auch der Anfangswert x nehmen Werte im (Sobolev-) Raum $H = H_0^1(0, 1)$ der schwach differenzierbaren, quadratintegrierbaren Funktionen über dem Intervall $[0, 1]$ mit Nullrandbedingungen an.

Analog zu Gleichung (2.1) in Unterkapitel 2.2.1 untersuchen wir das erwartete Austrittsverhalten der Lösung $T^\varepsilon(t; x)$ von (2.18) aus dem Anziehungsgebiet D^+ beziehungsweise D^- eines deterministischen stabilen Punktes ϕ^+ oder ϕ^- im Limes für kleine Rauschintensität $\varepsilon \searrow 0$. Dabei wird das Intervall $[a, b]$ "um" einen stabilen Punkt s^* ersetzt durch ein Anziehungsgebiet D^\pm "um" einen stabilen Punkt ϕ^\pm . Im Gegensatz zum Wienerprozess für den ein exponentielles Anwachsen der erwarteten Austrittszeiten als Funktion von $\varepsilon > 0$ aus [28] und [29] bekannt ist, zeigt auch das in den Funktionenraum gehobene Model polynomielle Austrittsraten als Funktion von $1/\varepsilon$.

Zentrale Frage: Wie verhält sich die erwartete Austrittszeit $\mathbb{E}[\mathbb{T}_x(\varepsilon)]$ im Limes $\varepsilon \searrow 0$ für $x \in D^\pm(\varepsilon^\gamma)$

$$\mathbb{T}_x(\varepsilon) := \inf\{t > 0 \mid T_t^\varepsilon(x) \notin D^\pm\}?$$

Die ungleich größeren technischen Schwierigkeiten übergehen wir hier.

1. Schritt: Eine feine und technisch aufwändige Untersuchung der Dynamik der Lösungen in der Nähe der separierenden Mannigfaltigkeit der Anziehungsgebiete der deterministischen Chafee-Infante-Gleichung (2.16) erlaubt die nichttriviale Konstruktion von verkleinerten Anziehungsgebieten $D^\pm(\varepsilon^\gamma) \subset D^\pm$ der stabilen Lösungen ϕ^\pm . Diese reduzierten Gebiete $D^\pm(\varepsilon^\gamma)$, welche $[a + 2\varepsilon^\gamma, b - 2\varepsilon^\gamma]$ aus vorigem Unterkapitel ersetzen, haben analog zu Vorüberlegung 1. in 2.2.1 die Eigenschaft, dass sich die deterministische Lösung $T(t; x)$ für Anfangswerte $x \in D^\pm(\varepsilon^\gamma)$ und Zeiten t jenseits von $C|\ln(\varepsilon)|$ in einer kleinen Kugel $B_{\varepsilon^{2\gamma}}(\phi^\pm)$ um den stabilen Punkt ϕ^\pm befindet. Dabei ist die Konstante C ganz im Gegensatz zum vorigen Unterkapitel nicht einfach berechenbar und hängt von dem Parameter μ ab. Formal aufgeschrieben:

$$T(t; x) \in B_{\varepsilon^{2\gamma}}(\phi^\pm) \quad \text{für alle } t \geq C|\ln \varepsilon| \quad \text{und } x \in D^\pm(\varepsilon^\gamma). \quad (2.19)$$

2. Schritt: Für eine vorgegebene Schranke $c > 0$ definieren wir analog zu vorigem Unterkapitel rekursiv die Sprungzeiten von L mit Werten in H , deren Norm c überschreitet, mittels

$$\tau_{i+1}^\varepsilon := \inf\{t > \tau_i^\varepsilon \mid \|\Delta_t L\| > c\}, \quad \tau_0^\varepsilon = 0,$$

wobei wir wieder die nun funktionenwertige Notation $\Delta_t L := L(t) - L(t-)$ verwenden. Auf Grund der Unbeschränktheit des Diffusionsterms kann Gleichung (2.18) nicht einfach in Form (2.5) geschrieben werden. Stattdessen muss eine sogenannte milde Lösungsformulierung verwendet werden. Hierfür verwendet man die zu $A := \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ gehörige Wärmeleitungshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$. In Analogie zu endlich-dimensionalen linearen Operatoren (Matrizen) kann man $S(t)$ mit e^{At} identifizieren. Dies kann mit Hilfe des entsprechenden Funktionalkalküls rigoros gemacht werden. Eine Standardreferenz ist [30] und Referenzen darin. Dennoch bleibt die bisher erarbeitete Intuition für die Austritte gültig, nur die Beweise ändern sich (teilweise drastisch).

Analog zu Gleichung (2.5) erfüllt diese insbesondere, dass die Sprünge von T^ε gerade den Sprüngen von L entsprechen, da der Sprunganteil gegeben ist durch

$$\Delta_{\tau_i} T^\varepsilon = \Delta_{\tau_i} \int_0^\cdot S(\cdot - s) dL(s) = \Delta_{\tau_i} L, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Parametrisieren wir die Schranke c wieder mit ε durch $c = c(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\rho}$ für Werte $\rho \in (0, 1)$. Wir teilen erneut L in zwei Teilprozesse auf, $L(t) = \xi^\varepsilon(t) + \eta^\varepsilon(t)$, einen kleinen Sprungprozess ξ^ε , der

$$\varepsilon \|\Delta_t \xi^\varepsilon\| \leq \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^\rho} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0+ \quad (2.21)$$

erfüllt und einen Anteil mit großen Sprünge η^ε , mit $\eta^\varepsilon(t) = \sum_{i: \tau_i \leq t} \Delta_{\tau_i} L$, $t \geq 0$.

Die starke Markoveigenschaft, die auch für den milden Lösungsbegriff erfüllt ist, gibt genau wie in Unterkapitel 2.2.1 für die Lösung T_t^ε für alle $t \in [\tau_i^\varepsilon, \tau_{i+1}^\varepsilon)$ folgende Darstellung

$$T_t^\varepsilon(x) = Y_{t-\tau_i^\varepsilon}^{\varepsilon, i}(T_{\tau_i^\varepsilon}(x)) \quad (2.22)$$

und

$$T_{\tau_{i+1}^\varepsilon}^\varepsilon(x) = Y_{\tau_{i+1}^\varepsilon - \tau_i^\varepsilon}^{\varepsilon, i}(T_{\tau_i^\varepsilon}(x)) + \varepsilon W_{i+1}^\varepsilon. \quad (2.23)$$

wobei erneut $Y^{\varepsilon, i}$ von allein von $\varepsilon \xi^{\varepsilon, i}$ getrieben wird, wenngleich im milden Sinne.

Analog zum skalaren Fall weicht $Y^\varepsilon(t; x)$ von der deterministischen Lösung $T(t; x)$, sobald die Lösung in eine große Kugel $B_{r^*}(0)$ innerhalb einer festen Zeit relaxiert hat, nur vernachlässigbar auf den Wartezeiten $\tau_{i+1}^\varepsilon - \tau_i^\varepsilon$. Formal erhält man die Konvergenz

$$\sup_{x \in D^\pm(\varepsilon^\gamma) \cap B_{r^*}(0)} \sup_{\tau_i^\varepsilon \leq t \leq \tau_{i+1}^\varepsilon} \|Y^\varepsilon(t; x) - T(t; x)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \searrow 0 \quad (2.24)$$

in Wahrscheinlichkeit. Die Lösung der stochastischen Chafee-Infante-Gleichung folgt also, solange kein großer Sprung erfolgt, im Wesentlichen der deterministischen Trajektorie zum stabilen Gleichgewicht und trägt dadurch asymptotisch nichts zum Austrittsverhalten bei, sodass wiederum die Austritte von den großen Sprüngen ausgehen. Da man in den unendlichdimensionalen Räumen die Gleichung nur in mildem Sinne lösen kann, beweist man an Stelle von Gleichung (2.24) dass das Resultat für kleine Abweichung für Y^ε aus der Aussage

$$\varepsilon \xi^*(t) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \searrow 0+, \quad \text{für } t \geq 0$$

folgt, wobei $\xi^*(t) = \int_0^t S(t-s) d\xi^\varepsilon(s)$ die stochastische Faltung von $(S(t))_{t \geq 0}$ mit $(\xi_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ ist.

3. Schritt: Die Wartezeiten $\tau_{i+1}^\varepsilon - \tau_i^\varepsilon$ zwischen den Sprüngen von η^ε sind alle unabhängig und exponentialverteilt zum Parameter β_ε , wobei

$$\beta_\varepsilon := \nu \left(\frac{1}{\varepsilon^\rho} B_1^c(0) \right) = \varepsilon^{\alpha\rho} \nu(B_1^c(0))$$

und ν das Lévy-Sprungmaß von L mit der Eigenschaft (2.17). Die Exponentialverteilung impliziert eine erwartete Sprungzeit der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon^{\rho\alpha}}$, die für kleine Werte von ε sehr viel größer ist als die logarithmische, ε -abhängige Schranke der Relaxationszeit $C|\ln(\varepsilon)|$ der deterministischen Lösung T zur Kugel $B_{\varepsilon^{2\gamma}}(\phi^\pm)$. Es ist somit natürlicherweise zu erwarten, dass in der Regel Y^ε genügend Zeit hatte in diese Umgebung um den stabilen Punkt zurückzukehren, bevor der nächste große Sprung stattfindet, ohne $D^\pm(\varepsilon^\gamma)$ zwischenzeitlich verlassen zu haben. Der große Sprung startet also von ganz in der Nähe des stabilen Gleichgewichts. Kombiniert man nun die Effekte aus (2.19), (2.20) und (2.24) erhält man, dass für kleines ε Austritte stets innerhalb von $B_{\varepsilon^{2\gamma}}(\phi^\pm)$ beginnen und höchstwahrscheinlich von dem großen Sprungprozess $\varepsilon \eta^\varepsilon$ ausgelöst wurde. Es ist demnach natürlich anzunehmen, dass die erste Austrittszeit $\mathbb{T}_x(\varepsilon)$ aus D^\pm im Wesentlichen die Form

$$\mathbb{T}(\varepsilon) \approx \inf\{\tau_i \mid \phi^\pm + \varepsilon \Delta_{\tau_i} L \notin D^\pm\}.$$

hat. Dies ist das Analogon zu (2.15).

4. Schritt: Wir nutzen nun die Skalierungseigenschaft (2.17) des Lévy-Sprungmaßes ν aus und berechnen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\phi^\pm + \varepsilon \Delta_{\tau_i} L \notin D^\pm) &= \mathbb{P}\left(\Delta_{t_1} L \in \frac{1}{\varepsilon} ((D^\pm)^c - \phi^\pm)\right) \\ &= \frac{\nu\left(\frac{1}{\varepsilon} ((D^\pm)^c - \phi^\pm) \cap \frac{1}{\varepsilon^\rho} B_1^c(0)\right)}{\nu\left(\frac{1}{\varepsilon^\rho} B_1^c(0)\right)} \\ &= \varepsilon^\alpha \frac{\nu((D^\pm)^c - \phi^\pm)}{\beta_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Die erwarteten Austrittszeit aus einem etwas kleineren Anziehungsgebiet eines stabilen Gleichgewichts ϕ^\pm ist asymptotisch für kleine Werte von $\varepsilon > 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{T}_x(\varepsilon)] &\approx \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[\tau_i^\varepsilon] \mathbb{P}\left(\inf\{j : \phi^\pm + \varepsilon \Delta_{\tau_j^\varepsilon} L \notin D^\pm\} = i\right) \\ &= \mathbb{E}[\tau_1^\varepsilon] \mathbb{P}(\phi^\pm + \varepsilon \Delta_{\tau_1^\varepsilon} L \notin D^\pm) \sum_{i=1}^{\infty} i (1 - \mathbb{P}(\phi^\pm + \varepsilon \Delta_{\tau_i^\varepsilon} L \notin D^\pm))^{i-1} \\ &= \frac{1}{\beta_\varepsilon} \frac{1}{\mathbb{P}(\phi^\pm + \varepsilon \Delta_{\tau_1^\varepsilon} L \notin D^\pm)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \frac{1}{\nu((D^\pm)^c - \phi^\pm)}. \end{aligned}$$

3 Schlussbemerkungen

In vorigem Kapitel wurden zwei ähnliche Austrittsmechanismen für einfache, konzeptionelle Klimamodelle vorgestellt. Das Hauptergebnis besteht darin zu erkennen, warum für beide Versionen die erwartete erste Austrittszeit aus dem Anziehungsgebiet eines stabilen Gleichgewichts, sofern man darin startet, der durch einen α -stabilen Lévyprozess gestörten Gleichung mit kleiner Intensität asymptotisch polynomiell anwächst,

$$\mathbb{E}[\mathbb{T}_x(\varepsilon)] \approx C\varepsilon^{-\alpha} \quad \text{für kleines } \varepsilon > 0.$$

Beide Austrittsergebnisse sowohl in [8] als auch in [10], sind um den konzeptionellen Begriff der Metastabilität ergänzt, der für die jeweiligen Systeme bewiesen wird. Dafür betrachtet man Systeme deren Potential U mehrere lokale Minima s_1^*, \dots, s_n^* aufweisen, die den stabilen Gleichgewichten entsprechen. Er besagt, dass der Temperaturprozess $(T_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$, wenn er auf einer Zeitskala t/ε^α statt t betrachtet wird, für kleines ε sich immer mehr wie ein Pingpong-Mechanismus, zwischen genau den stabilen Punkten s^* des Systems verhält. Dies wird verständlich, da auf dieser Zeitskala die Übergänge zwischen verschiedenen Anziehungsgebieten sich in erwarteter Zeit 1 ereignen. Zudem konvergieren die Relaxationszeit von $T = T^0$ für diese auf diesen Zeitskalen gegen 0, da

$$\frac{t}{\varepsilon^\alpha} \geq C|\ln(\varepsilon)| \quad \Leftrightarrow \quad t \geq C|\ln(\varepsilon)|\varepsilon^\alpha \searrow 0, \quad \text{falls } \varepsilon \searrow 0.$$

Die Rolle der kleinen Sprungdynamik, die durch $Y^{\varepsilon, i}$ gegeben war, spielt asymptotisch also gar keine Rolle mehr. Mathematisch bedeutet dies, dass der Prozess

$$T_{t/\varepsilon^\alpha}^\varepsilon(x) \longrightarrow Z_t$$

gegen eine nicht mehr ε -abhängige Markovkette $(Z_t)_{t \geq 0}$ in kontinuierlicher Zeit mit Werten in s_1^*, \dots, s_n^* konvergiert, deren Übergangswahrscheinlichkeiten wiederum allein durch ν gegeben ist. Dies bedeutet grob gesagt, dass das beobachtete Übertrittsverhalten der komplexen Trajektorien von T^ε im Wesentlichen dem einer zeitlich "verschmierten", bekannten, einfachen Dynamik entspricht.

Phänomenologisch ist ein nächster Schritt die Erweiterungen dieser Dynamik um periodisch zeitabhängige Potentiale auf dem Weg zu einem vollständigen stochastischen Resonanzmechanismus mit nicht-Gauß'scher Störung, wie er eingangs zu Beginn dieses Kurzaufsatzes angedeutet wird.

Literatur

- [1] E. Jansen, J. Overpeck, K.R. Briffa, J.-C. Duplessy, F. Joos, V. Masson-Delmotte, D. Olago, B. Otto-Bliesner, W.R. Peltier, S. Rahmstorf, R. Ramesh, D. Raynaud, D. Rind, O. Solomina, R. Villalba, and D. Zhang. Paleo climate. *Climate Change 2007: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Solomon, S., D. Qin, M. Manning, Z. Chen, M. Marquis, K.B. Averyt, M. Tignor and H.L. Miller (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA., 2007.

- [2] P. D. Ditlevsen. Observation of a stable noise induced millennial climate changes from an ice-core record. *Geophysical Research Letters*, 26 (10):1441–1444, 1999.
- [3] S. Rahmstorf. Timing of abrupt climate change: A precise clock. *Geophysical Research Letters*, 30 (10):1510, 2003.
- [4] L. Ganopolski and S. Rahmstorf. Rapid changes of glacial climate simulated in a coupled climate model. *Nature*, 409:153, 2001.
- [5] C. Hein, P. Imkeller, and I. Pavlyukevich. Limit theorems for p-variations of solutions of SDEs driven by additive stable Lévy noise and model selection for paleo-climatic data. *Interdisciplinary Math. Sciences*, 8:137–150, 2009.
- [6] J. Gairing, C. Hein, P. Imkeller, and I. Pavlyukevich. Dynamical models of climate time series and the rate of convergence of power variations. *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Report*, 40:–, 2011.
- [7] P. Imkeller and I. Pavlyukevich. First exit times of SDEs driven by stable Lévy processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 116(4):611–642, 2006.
- [8] P. Imkeller and I. Pavlyukevich. Metastable behaviour of small noise Lévy-driven diffusions. *ESAIM: Probability and Statistics*, 12:412–437, 2008.
- [9] I. Pavlyukevich. First exit times of solutions of stochastic differential equations with heavy tails. *Stochastics and Dynamics*, 11, Exp. No. 2/3:1–25, 2011.
- [10] M. Högele. Metastability of the Chafee-Infante equation with small heavy-tailed Lévy noise. *Dissertation at Humboldt-Universität zu Berlin*, 2011.
- [11] M. Claussen, L. A. Mysak, A. J. Weaver, M. Crucifix, T. Fichefet, M.-F. Loutre, S. L. Weber, J. Alcamo, V. A. Alexeev, A. Berger, R. Calov, A. Ganopolski, H. Goosse, G. Lohmann, F. Lunkeit, I. I. Mokhov, V. Petoukhov, P. Stone, and Z. Wang. Earth system models of intermediate complexity: Closing the gap in the spectrum of climate system models. *Climate Dynamics*, 18:579–586, 2002.
- [12] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1963.
- [13] P. D. Ditlevsen. Anomalous jumping in a double-well potential. *Physical Review E*, 60 (1):172–179, 1999.
- [14] M. I. Freidlin and A. D. Ventsell. Random perturbations of dynamical systems transl. from the Russian by J. Szuecs. 2nd ed. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 260. New York, NY: Springer*, 1998.
- [15] P. Imkeller and I. Pavlyukevich. Lévy flights: Transitions and meta-stability. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39:L237–L246, 2006.
- [16] P. Imkeller and A. Monahan. Conceptual stochastic climate models. *Stochastics and Dynamics*, 2:311–326, 2002.
- [17] K. I. Sato. Lévy processes and infinitely divisible distributions. *Cambridge University Press*, 1999.
- [18] D. Applebaum. Levy processes and stochastic calculus. *Cambridge university press*, 2nd edition, 2009.
- [19] V.V. Petrov. Limit theorems of probability theory: Sequences of independent random variables. *Claredon Press, Oxford*, 1995.
- [20] P. Imkeller. Energy balance models: Viewed from stochastic dynamics. *Prog. Prob.*, 49:213–240, 2001.
- [21] N. Chafee and E. F. Infante. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. *Applicable Anal.*, 4:17–37, 1974.

- [22] J. K. Hale. Infinite-dimensional dynamical systems. Geometric dynamics (rio de janeiro, 1981). *Lecture Notes in Math.*, 1007, 1983.
- [23] D. Henry. Some infinite-dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic partial differential equations. *Journal of Differential equations*, 59:165–205, 1985.
- [24] J. Carr and R. Pego. Metastable patterns in solutions of $u_t = u_{xx} - f(u)$. *Commun. Pure. Appl. Math.*, 42(5):523–574, 1989.
- [25] R. Temam. Dynamical systems in Physics and applications. *Springer Texts in Applied Mathematics*, Springer, 1992.
- [26] S. G. Sell and Y. You. Dynamics of evolutionary equations. *Applied Mathematical Sciences 143*, Springer, 2002.
- [27] P. Imkeller A. Debussche, M. Högele. The dynamics of non-linear reaction-diffusion equations with small Lévy noise. *Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2085*, page 136p., 2013.
- [28] G. W. Faris and G. Jona-Lasinio. Large fluctuations for a nonlinear heat equation with noise. *J. Math. Pures Appl.*, 77:879–907, 1982.
- [29] M. Freidlin. Random perturbations of reaction-diffusion equations: The quasi-deterministic approximation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 305 (2):665–697, 1988.
- [30] S. Peszat and J. Zabczyk. Stochastic partial differential equations with Lévy noise (an evolution equation approach). *Cambridge University Press*, 2007.